Matematik A, HTX
Formelsamling

Dette er en formelsamling, som dækker over kernestoffet til matematik A på HTX. Formler og ligninger er understøttet med illustrationer og figurer, hvortil relevante størrelser er beskrevet.

Bemærk, at det typisk ikke er angivet for hvilke værdier, de forskellige formler er veldefineret.

På næste side findes en indholdsfortegnelse over de forskellige kapitler i formelsamlingen. Bagerst findes en ordliste, som kan være behjælpelig til navigation.

Tak til Bente Pihl og Morten Hyllested for korrekturlæsning og inputs. Trykfejl kan rapporteres til mail@matj.dk.

Oktober 2026
Alex Thomas Jørgensen
www.matj.dk

Kapiteloversigt

1 Regneregler **2**
- 1.1 Brøker . . . 2
- 1.2 Kvadratsætninger . . . 2
- 1.3 Potenser og rødder . . . 3
- 1.4 Logaritmer . . . 4
- 1.5 Ligninger . . . 4

2 Geometri **6**
- 2.1 Trekanter (herunder trigonometri) . . . 6
- 2.2 Cirklen . . . 8

3 Analytisk plangeometri **11**
- 3.1 Den rette linje . . . 11
- 3.2 Punkter i planen . . . 12
- 3.3 Cirklen i koordinatsystemet . . . 14
- 3.4 Parablen . . . 15

4 Vektorer i planen **17**
- 4.1 Regning med vektorer . . . 18
- 4.2 Linjer . . . 21

5 Rumgeometri **23**
- 5.1 Geometriske figurer . . . 23
- 5.2 Vektorer i rummet . . . 26
- 5.3 Linjer i rummet . . . 29
- 5.4 Planer i rummet . . . 31
- 5.5 Kuglen . . . 33

6 Funktioner **34**
- 6.1 Lineære funktioner . . . 34
- 6.2 Andengradspolynomier . . . 34
- 6.3 Potensfunktioner . . . 34
- 6.4 Eksponentielle funktioner . . . 35
- 6.5 Logaritmefunktioner . . . 37
- 6.6 Trigonometriske funktioner . . . 37

7 Differentialregning **39**

8 Integralregning **41**
- 8.1 Ubestemt integral . . . 41
- 8.2 Bestemt integral . . . 43
- 8.3 Andvendelse . . . 44

9 Vektorfunktioner **45**

10 Differentialligninger **47**

11 Rekursioner **48**

1 Regneregler

1.1 Brøker

Regneregler

Forlænge og forkorte en brøk

$$\frac{a}{b} = \frac{k \cdot a}{k \cdot b}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{k}}{\frac{b}{k}}$$

Gange en brøk med et tal og dele en brøk med et tal

$$k \cdot \frac{a}{b} = \frac{k \cdot a}{b}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{k} = \frac{a}{b \cdot k}$$

Dele et tal med en brøk

$$\frac{k}{\frac{a}{b}} = \frac{k \cdot b}{a}$$

Addition af brøker

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}$$

Subtraktion af brøker

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - c \cdot b}{b \cdot d}$$

Multiplikation af brøker

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Division af brøker

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

1.2 Kvadratsætninger

Regneregler

Kvadratsætningerne siger at

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b$$

$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b$$

$$(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$$

1.3 Potenser og rødder

Potensregneregler

Der gælder flg. potensregneregler

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \qquad \text{(for } b \neq 0\text{)}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^0 = 1$$

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

$$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$$

Rødder

Når $a, b \geq 0$ gælder der at

$$\sqrt[n]{a^p} = a^{\frac{p}{n}}$$

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \qquad \text{(for } b \neq 0\text{)}$$

1.4 Logaritmer

Den naturlige logaritme

For $x > 0$ er den naturlige logartime defineret som

$$\ln(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad e^y = x$$

Der gælder specielt at

$$\ln(1) = 0$$
$$\ln(e^x) = x$$
$$e^{\ln(x)} = x$$

10-tals logaritmen

For $x > 0$ er 10-tals logaritimen defineret som

$$\log_{10}(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad 10^y = x$$

Der gælder specielt at

$$\log_{10}(1) = 0$$
$$\log_{10}(10^x) = x$$
$$10^{\log_{10}(x)} = x$$

Generelle regnerelger

Der gælder flg. logaritmeregneregler

$$\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$$
$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$$
$$\log(a^n) = n \cdot \log(a)$$
$$\log(\sqrt[n]{a}) = \frac{1}{n} \cdot \log(a)$$

1.5 Ligninger

Førstegradsligninger

Førstegradsligningen $a \cdot x + b = 0$ har løsningen

$$x = -\frac{b}{a}$$

Andengradsligninger

For en andengradsligning $ax^2 + bx + c = 0$ er løsningerne bestemt af diskriminanten

$$D = b^2 - 4ac$$

- Hvis $D > 0$ er der to reelle løsningerne og de kan beregnes ved

$$x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \quad \text{og} \quad x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

- Hvis $D = 0$ er der en reel løsning og den kan beregnes ved

$$x = -\frac{b}{2a}$$

- Hvis $D < 0$ er der ingen reelle løsninger.

To ligninger med to ubekendte

De to ligninger med to ubekendte

$$a_1 \cdot x + b_1 \cdot y = c_1$$

$$a_2 \cdot x + b_2 \cdot y = c_2$$

har løsningerne

$$x = \frac{c_1 \cdot b_2 - c_2 \cdot b_1}{a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1} \quad \text{og} \quad y = \frac{a_1 \cdot c_2 - a_2 \cdot c_1}{a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1}$$

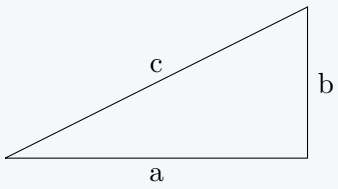
2 Geometri

2.1 Trekanter (herunder trigonometri)

Pythagoras

I en retvinklet trekant gælder der flg. sammenhæng mellem kateterne a og b, og hypotenusen c

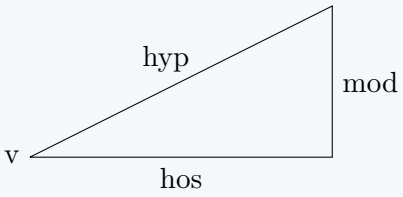
$$a^2 + b^2 = c^2$$



Den retvinklede trekant

I en retvinklet trekant gælder der flg. sammenhæng mellem en vinkel v og trekantens sider

$$\sin(v) = \frac{mod}{hyp}, \quad \cos(v) = \frac{hos}{hyp}, \quad \tan(v) = \frac{mod}{hos}$$

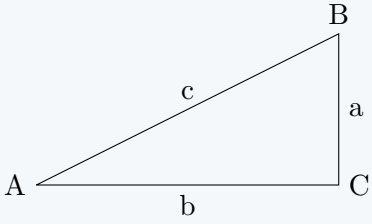


Den retvinklede trekant

I en retvinklet trekant ΔABC gælder der flg.

$$\sin(A) = \frac{a}{c}, \quad \cos(A) = \frac{b}{c}, \quad \tan(A) = \frac{a}{b}$$

$$\sin(B) = \frac{b}{c}, \quad \cos(B) = \frac{a}{c}, \quad \tan(B) = \frac{b}{a}$$

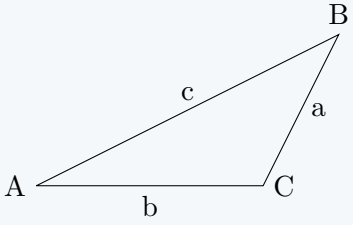


Sinusrelationen

I den vilkårlige trekant gælder sinusrelationen

$$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)}$$

$$\frac{\sin(A)}{a} = \frac{\sin(B)}{b} = \frac{\sin(C)}{c}$$

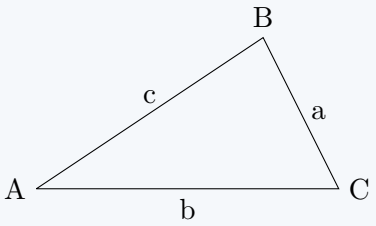


Cosinusrelationen

I den vilkårlige trekant gælder cosinusrelationen

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(A)$$

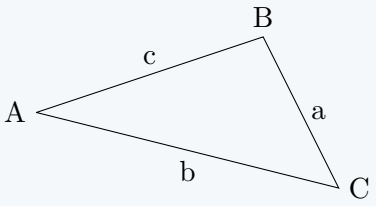
$$A = \cos^{-1}\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}\right)$$



Arealet af en vilkårlig trekant

Arealet T, af en vilkårlig trekant kan beregnes ved

$$T = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(C)$$



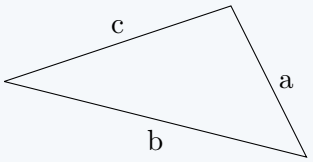
Herons formel

Herons formel kan bruges til at finde arealet af en vilkårlig trekant ud fra trekantens sidelængder. Arealet, T, kan beregnes ved

$$T = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}$$

Her er

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$



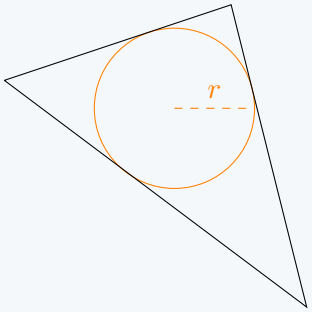
Den indskrevne cirkel

I en trekant med siderne a, b og c kan arealet af trekanten regnes som

$$T = \frac{1}{2} \cdot r \cdot (a+b+c)$$

Her er r radius i den indskrevne cirkel.

Centrum for den indskrevne cirkel er givet som skæringspunktet mellem vinkelhalveringslinjerne i trekanten.



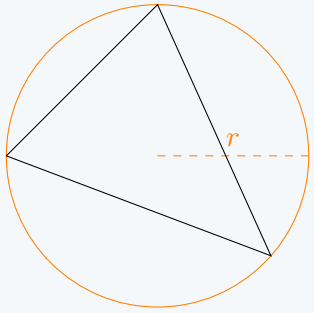
Den omskrevne cirkel

I en trekant med siderne a, b og c kan arealet af trekanten beregnes ved

$$T = \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot R}$$

Her er R radius i den omskrevne cirkel.

Centrum for den omskrevne cirkel er givet som skæringspunktet mellem midtnormalerne i trekanten.



2.2 Cirklen

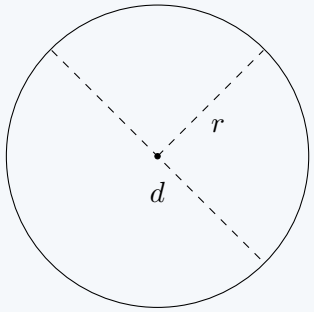
Areal og omkreds

I en cirkel med radius r og diameter d er arealet

$$A = \pi \cdot r^2$$

og omkredsen

$$O = \pi \cdot d = \pi \cdot 2 \cdot r$$

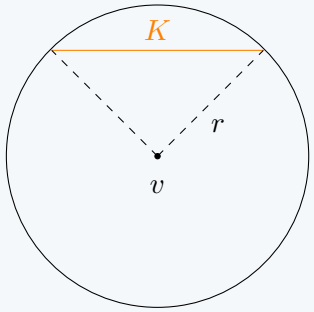


Kordelængde

Kordelængden K, som spænder over en vinkel v, kan beregnes ved

$$K = 2 \cdot r \cdot \sin\left(\frac{v}{2}\right)$$

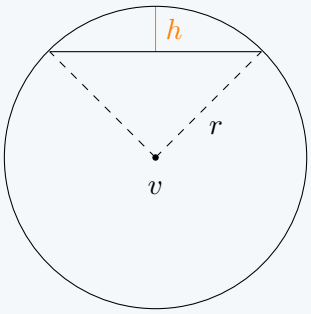
Her er r radius i cirklen.



Pilhøjde

I en cirkel med radius r og vinkel v, kan pilhøjden h beregnes ved

$$h = r \cdot \left(1 - \cos\left(\frac{v}{2}\right)\right)$$



Sammenhæng mellem radius, korde og pilhøjde

I en cirkel med radius r gælder flg. sammenhæng mellem kordelængden K og pilhøjden h

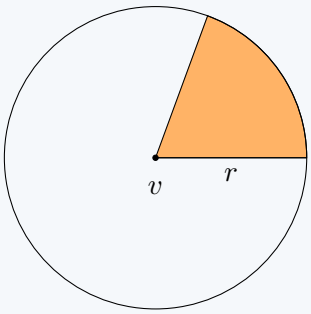
$$r = \frac{h}{2} + \frac{K^2}{8 \cdot h}$$

Cirkeludsnit

Arealet T, af et cirkeludsnit, som spænder over en vinkel v, kan beregnes ved

$$T = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{v}{360}$$

Her er r cirklens radius.

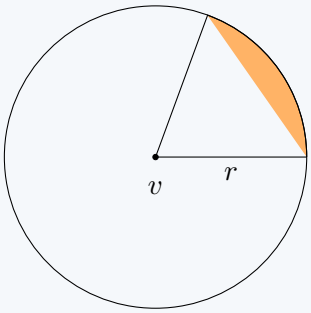


Cirkelafsnit

Arealet af et cirkelafsnit, som spænder over en vinkel v, kan beregnes ved

$$T = r^2 \cdot \left(\frac{\pi \cdot v}{360} - \frac{\sin(v)}{2}\right)$$

Her er r cirklens radius.

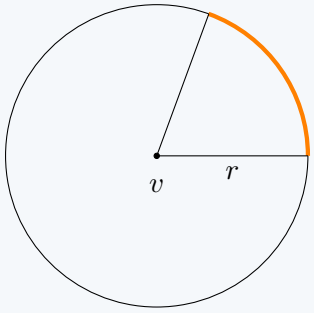


Cirkelbue

Længden af et cirkelbue, som spænder over en vinkel v, kan beregnes ved

$$L = 2\pi \cdot r \cdot \frac{v}{360}$$

Her er r cirklens radius.



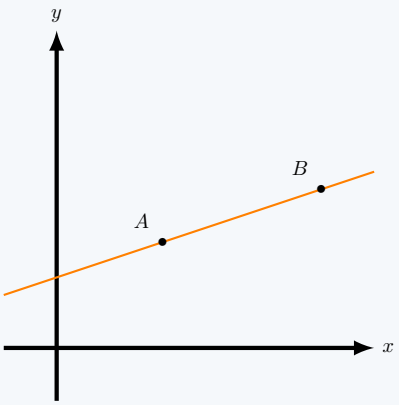
3 Analytisk plangeometri

3.1 Den rette linje

Linje gennem to punkter

Forskriften for den rette linje $y = ax + b$ gennem to punkter $A = (x_0, y_0)$ og $B = (x_1, y_1)$ kan beregnes ved

$$a = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}, \qquad b = y_0 - a \cdot x_0$$



Linje ud fra punkt og hældning

Linjen med hældning a gennem punktet (x_0, y_0) kan beregnes ved

$$y = a \cdot (x - x_0) + y_0$$

Parallelle linjer

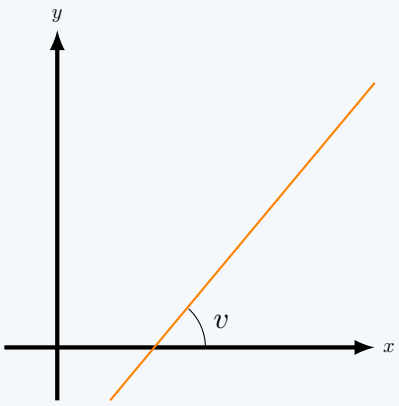
Linjerne $y = ax + b$ og $y = cx + d$ er parallelle hvis $a = c$.

Den lodrette afstand mellem linjerne er $|b - d|$.

Linjens vinkel med x-aksen

Vinklen mellem linjen $y = ax + b$ og x-aksen kan beregnes ved

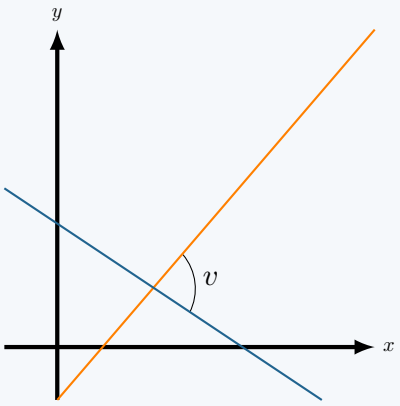
$$v = \tan^{-1}(a)$$



Vinkel mellem to linjer

Vinklen mellem linjerne $y = ax + b$ og $y = cx + d$ kan beregnes ved

$$v = \left|\tan^{-1}(a) - \tan^{-1}(c)\right|$$



Ortogonale linjer

Linjerne $y = ax + b$ og $y = cx + d$ er ortogonale (vinkelrette på hinanden) hvis

$$a \cdot c = -1$$

Skæringspunkt mellem to linjer

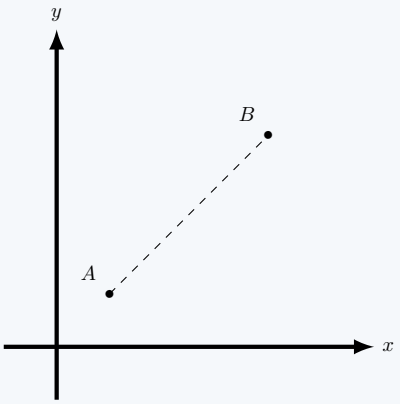
Skæringspunktet mellem linjerne $y = ax + b$ og $y = cx + d$, kan beregnes ved at løse to ligninger med to ubekendte i x og y.

3.2 Punkter i planen

Afstandsformlen (afstand fra punkt til punkt)

Afstanden mellem punktet $A = (x_0, y_0)$ og punktet $B = (x_1, y_1)$ kan beregnes ved

$$|AB| = \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}$$



Midtpunkt

Midtpunktet M imellem to punkter $A = (x_0, y_0)$ og $B = (x_1, y_1)$ kan beregnes ved

$$M = \left(\frac{x_0 + x_1}{2}, \frac{y_0 + y_1}{2} \right)$$

Distanceformlen (afstand fra punkt til linje)

Den korteste afstand $dist(P, l)$ fra punktet $P = (x_0, y_0)$ til linjen $l : y = ax + b$ kan beregnes ved

$$dist(P, l) = \frac{|a \cdot x_0 + b - y_0|}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

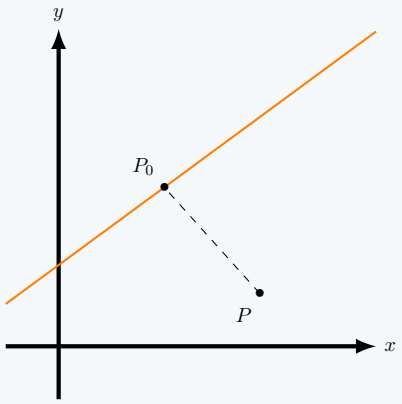
Projektionen af punkt på linje

Projektionen, P_0, af punktet $P = (x_0, y_0)$ på linjen $l : y = ax + b$ kan beregnes ved flg. opskrift

1. Find linjen som er ortogonal på linjen l. Kald denne linje for m.

$$m : y = -\frac{1}{a}x + (y_0 + \frac{x_0}{a})$$

2. Find skæringspunktet mellem linjerne m og l. Dette er projektionen af P på l.

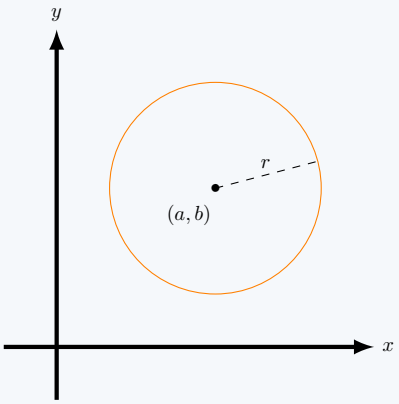


3.3 Cirklen i koordinatsystemet

Cirklens ligning

En cirkel med centrum (a, b) og radius r kan beskrives med ligningen

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$



Skæring mellem cirkel og linje

Skæringer mellem en linje $y = cx + d$ og en cirkel $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ kan beregnes ved at løse andengradsligningen

$$(x-a)^2 + (cx+d-b)^2 = r^2$$

- Hvis andengradsligningen har 2 løsninger er linjen en sekant og der er to skæringer.
- Hvis andengradsligningen har 1 løsning er linjen en tangent og der er en skæring.
- Hvis andengradsligningen har 0 løsninger, skærer linjen ikke cirklen.

Skæring mellem cirkel og cirkel

Mulige skæringspunkter mellem cirklerne

$$(x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 = r_1^2$$

og

$$(x-a_2)^2 + (y-b_2)^2 = r_2^2$$

kan beregnes ved at løse ligningen

$$(x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 - \big((x-a_2)^2 + (y-b_2)^2\big) = r_1^2 - r_2^2$$

3.4 Parablen

Grafens udseende

Ligningen hørende til en parabel er

$$y = ax^2 + bx + c$$

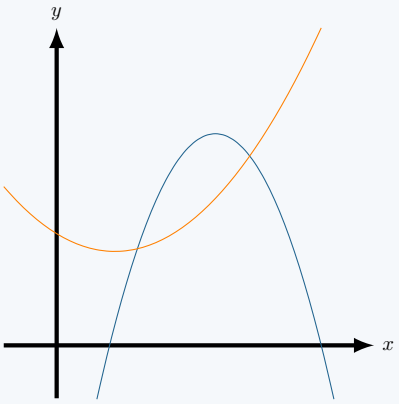
Betydning af a:

- Hvis $a > 0$ så er parablen glad (se orange graf).
- Hvis $a < 0$ så er parablen sur (se blå graf).

Betydning af b:

- Hvis $b > 0$ så er parablen voksende omkring skæringspunktet med y-aksen.
- Hvis $b < 0$ så er parablen aftagende omkring skæringspunktet med y-aksen.
- Hvis $b = 0$ så skærer parablen y-aksen i sit toppunkt.

Parablen skærer y-aksen i punktet $(0, c)$.



Skæring med x-aksen

En parabels skæring med x-aksen (hørende til ligningen $y = ax^2 + bx + c$) er bestemt af diskriminanten

$$D = b^2 - 4ac$$

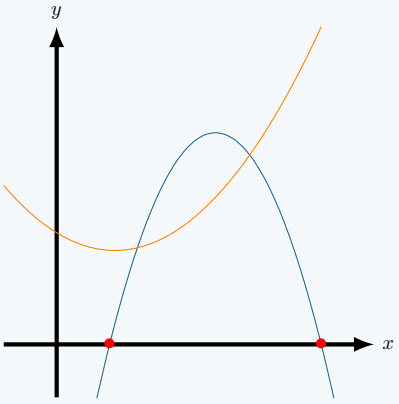
- Hvis $D > 0$ skærer parablen x-aksen i to punkter. Skæringspunkter findes ved

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

- Hvis $D = 0$ skærer parablen x-aksen i et punkt. Skæringepunktet findes ved

$$x_1 = -\frac{b}{2a}$$

- Hvis $D < 0$ skærer parablen IKKE x-aksen.

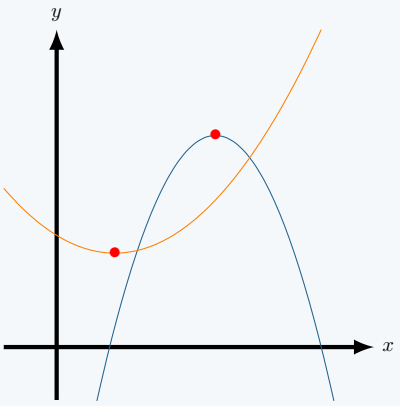


Toppunkt

En parabels toppunkt (hørende til ligningen $y = ax^2 + bx + c$) kan beregnes ved formlen

$$\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a}\right)$$

Her er $D = b^2 - 4ac$ diskriminanten.

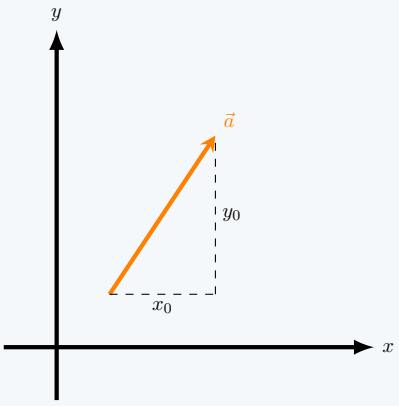


4 Vektorer i planen

Rektangulær form

En vektor $\vec{a}$ på rektangulær form beskriver hvor meget vektoren bevæger sig i x-retningen (x_0), og hvor meget vektoren bevæger sig i y-retningen (y_0)

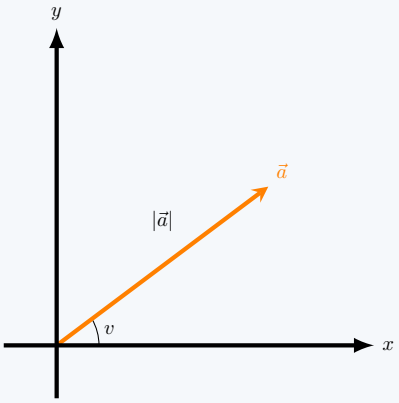
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$



Polær form

En vektor $\vec{a}$ på polær form beskrives ud fra vektorens længde $|\vec{a}|$ og den vinkel v den danner med x-aksen i positiv omløbsretning

$$\vec{a} = (|\vec{a}| \ ; \ v)$$



Omskrivning fra rektangulær til polær form

Givet en vektor på rektangulær form $\vec{a} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, kan længden beregnes på flg. måde

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$$

Vinklen $v = \tan^{-1}\left(\frac{y_0}{x_0}\right)$ afhænger af, hvilken kvadrant vektoren peger i retning mod

Kvadrant	1.	2.	3.	4.
Vinkel v	v	$v + 180$	$v + 180$	$v + 360$

Omskrivning fra polær til rektangulær form

Givet en vektor på polær form $(|\vec{a}| \ ; \ v)$, kan vektoren omskrives til rektangulær form ved

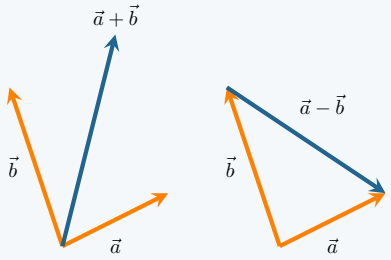
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} |\vec{a}| \cdot \cos(v) \\ |\vec{a}| \cdot \sin(v) \end{pmatrix}$$

4.1 Regning med vektorer

Sum og differens af vektorer

Givet to vektorer $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ kan summen og differensen beregnes ved

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \end{pmatrix}$$

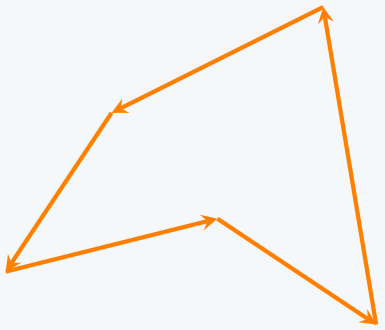


Ligevægt af vektorer

Et system af n vektorer $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}$ er i ligevægt hvis

$$\vec{v_1} + \vec{v_2} + \ldots + \vec{v_n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Grafisk kan man forstå det som, at summen af vektorerne ligger i den første adderede vektors begyndelsespunkt.



Multiplikation med et tal

Hvis $\vec{a} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ er en vektor og t er et tal, så er

$$t \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} t \cdot x_0 \\ t \cdot y_0 \end{pmatrix}$$

Når vektoren $\vec{a}$ ganges med et tal t, vil vektoren da have længde $|t| \cdot |\vec{a}|$. Hvis $t > 0$, vil vektorens retning være bevaret. Hvis $t < 0$, vil vektoren drejes 180°.

Tværvektoren

Tværvektoren til $\vec{a} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ findes ved at dreje vektoren 90 grader i positiv omløbsretning

$$\hat{\vec{a}} = \begin{pmatrix} -y_0 \\ x_0 \end{pmatrix}$$

Enhedsvektoren

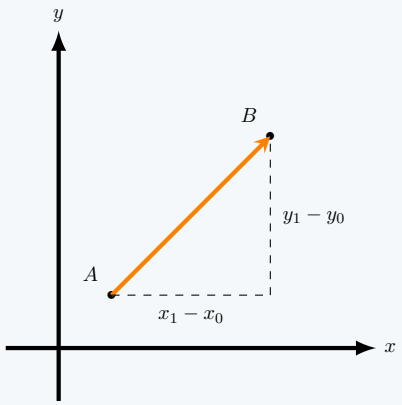
Enhedsvektoren til $\vec{a}$ har længde 1 og er peger i samme retning som $\vec{a}$

$$\overrightarrow{e_a} = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$$

Vektor mellem to punkter

Vektoren $\overrightarrow{AB}$ fra punktet $A = (x_0, y_0)$ til punktet $B = (x_1, y_1)$ kan beregnes ved

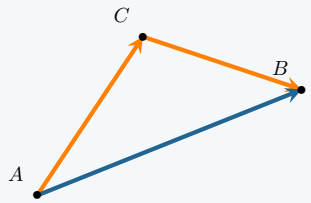
$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{pmatrix}$$



Indskudsreglen

Givet tre punkter i planen A, B og C gælder der at

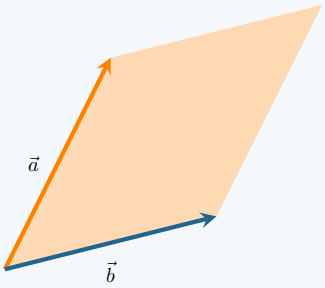
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$$



Areal udspændt af vektorer

Arealet, T, af parallelogrammet udspændt af de to vektorer $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ kan beregnes ved

$$T = |a_1 \cdot b_2 - b_1 \cdot a_2|$$



Prikprodukt/Skalarproduktet

Prikproduktet/Skalarproduktet mellem to vektorer $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ i planen er defineret som

$$\begin{aligned} \vec{a} \bullet \vec{b} &= a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 \\ &= \cos(v) \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \end{aligned}$$

Ortogonale vektorer

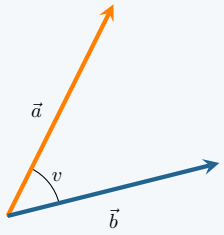
To vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er ortogonale, hvis deres prikprodukt giver nul.

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = 0$$

Vinkel mellem vektorer

Vinklen, v, mellem to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$, kan beregnes ved

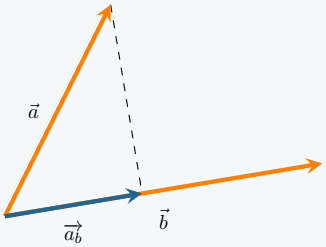
$$v = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right)$$



Projektion af vektorer

Projektionen af vektoren $\vec{a}$ på vektoren $\vec{b}$, kan beregnes ved

$$\overrightarrow{a_b} = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \cdot \vec{b}$$



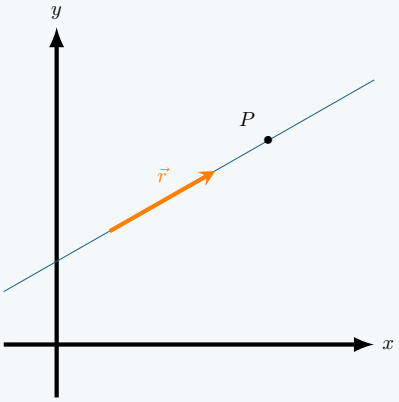
4.2 Linjer

Parameterfremstilling for linje

Linjen med retningsvektor $\vec{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ og som går gennem punktet $P = (x_0, y_0)$, har parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$$

Her er t en reel parameter.



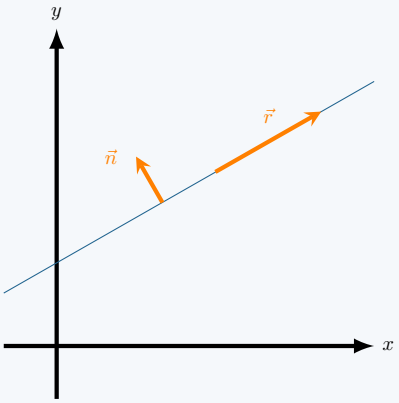
Normalvektor til linje

En normlavektor til en linje, er en vektor, som står vinkelret på linjen.

Linjen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$$

har normalvektoren $\vec{n} = k \cdot \begin{pmatrix} -r_2 \\ r_1 \end{pmatrix}$ for alle valg af $k \neq 0$.



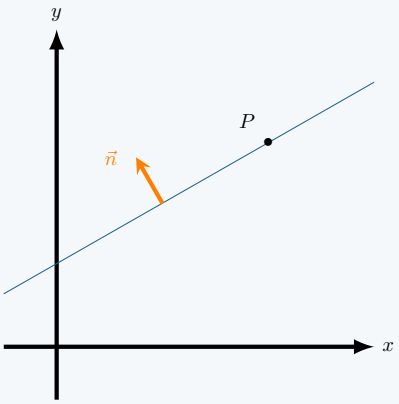
Linjen $y = ax + b$ har normalvektoren $\vec{n} = k \cdot \begin{pmatrix} -a \\ 1 \end{pmatrix}$ for alle valg af $k \neq 0$

Linje ud fra normalvektor

En linje med normalvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}$ og som går gennem punktet $P = (x_0, y_0)$ har ligningen

$$n_1 \cdot (x - x_0) + n_2 \cdot (y - y_0) = 0$$

Dette kaldes også linjens ligning på normalform.



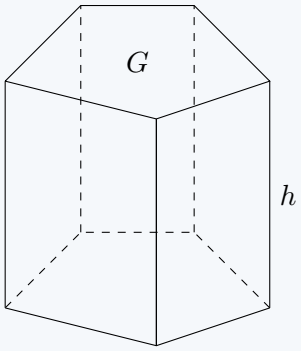
5 Rumgeometri

5.1 Geometriske figurer

Prisme

En prism med grundfladeareal G og højde h har rumfanget

$$V = G \cdot h$$



Cylinder

En cylinder med radius r og højde h har rumfanget

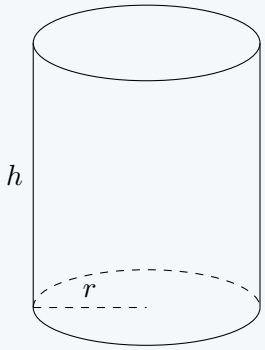
$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

og overfladearealet

$$O = 2\pi \cdot r \cdot (h + r)$$

Den krummme overfladeareal er

$$T = 2\pi \cdot r \cdot h$$



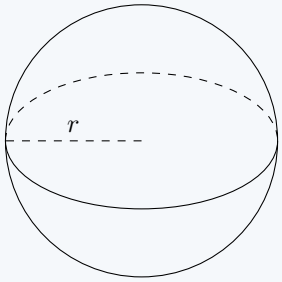
Kugle

En kugle med radius r har rumfanget

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$$

og overfladearealet

$$O = 4\pi \cdot r^2$$



Kugleafsnit

Et kugleafsnit har det krumme overfladeareal

$$T = 2\pi \cdot r \cdot h$$

og rumfang

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot h^2 \cdot (3r - h)$$

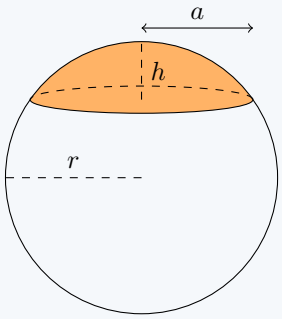
Her er r kuglens radius.

Kendes grundcirklens radius a, kan hhv. det krumme overfladeareal og rumfanget beregnes ved

$$T = \pi \cdot (a^2 + h^2)$$

og

$$V = \frac{1}{6}\pi \cdot h \cdot (3a^2 + h^2)$$

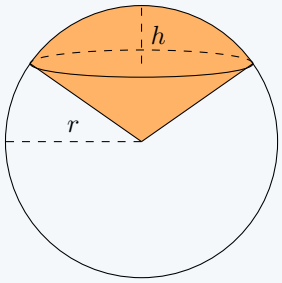


Kugleudsnit

Et kugleudsnit har rumfanget

$$V = \frac{2}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$$

Her er r kuglens radius.



Kegle

En kegle med radius r og højde h har rumfanget

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$$

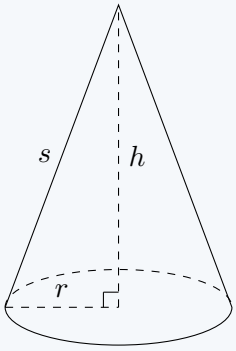
og overfladearealet

$$O = \pi \cdot r \cdot (r + s)$$

Her er $s = \sqrt{h^2 + r^2}$ sidenlængden af keglen.

Det krumme overfladeareal er

$$T = \pi \cdot r \cdot s$$

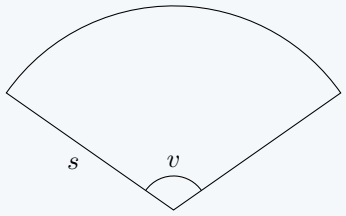


Udfoldning af kegle

Når keglen udfoldes, kan vinklen v beregnes ved

$$v = \frac{360 \cdot r}{s}$$

Her er s keglens sidelængde og r er radius for bundcirklen.



Keglestub

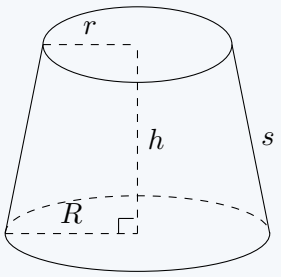
En keglestub med højde h har rumfanget

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot h \cdot (R^2 + r^2 + R \cdot r)$$

og overfladearealet

$$O = \pi \cdot s \cdot (R + r) + \pi \cdot (R^2 + r^2)$$

Her er r keglestubbens mindste radius, R er den største radius og $s = \sqrt{h^2 + (R - r)^2}$ er keglestubbens sidelængde.



Det krumme overfladeareal er

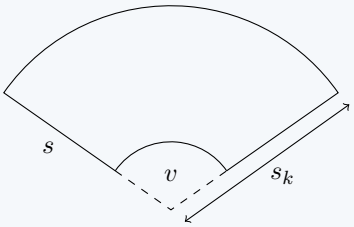
$$T = \pi \cdot s \cdot (R + r)$$

Udfoldning af keglestub

Når keglenstuben udfoldes, kan v beregnes ved

$$v = \frac{360 \cdot R}{s_k}$$

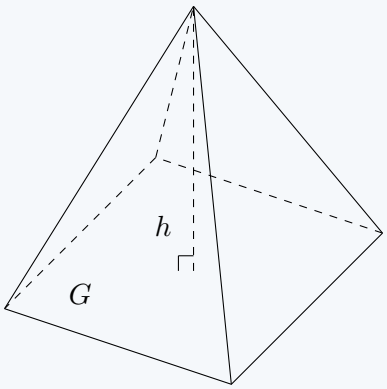
Her er s_k keglens sidelængde og R er radius for bundcirklen.



Pyramide

En pyramide med højde h og grundflade G har rumfanget

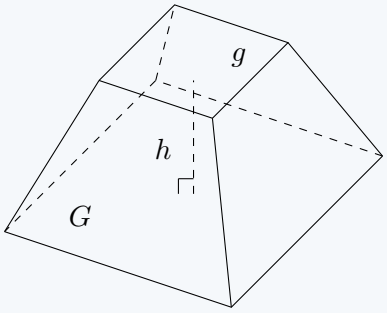
$$V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot G$$



Pyramidestub

En pyramidestub med højde h og grundfladerne G og g har rumfanget

$$V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot (G + g + \sqrt{G \cdot g})$$



5.2 Vektorer i rummet

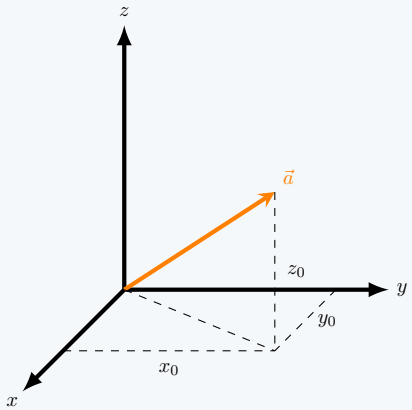
Længde af vektor

En vektor med de kartesiske koordinater

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

har længden

$$|\vec{v}| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$$



Sum, differens og muliplikation med et tal

Givet to vektorer $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ og et tal k, gælder der flg. regneregler

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix}, \quad k \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} k \cdot a_1 \\ k \cdot a_2 \\ k \cdot a_3 \end{pmatrix}$$

Enhedsvektoren

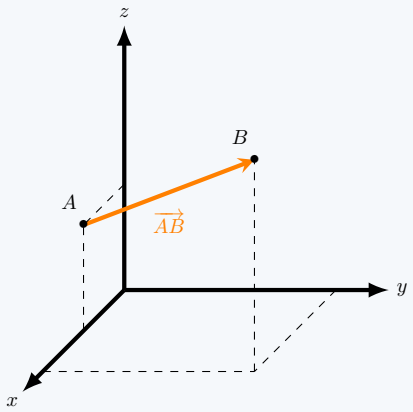
Enhedsvektoren til $\vec{a}$, er den vektor, som peger i samme retning som $\vec{a}$ og har længde 1. Den kan beregnes ved

$$\overrightarrow{e_a} = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$$

Vektor mellem to punkter

Vektoren $\overrightarrow{AB}$ fra punktet $A = (x_0, y_0, z_0)$ til punktet $B = (x_1, y_1, z_1)$ kan beregnes ved

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \\ z_1 - z_0 \end{pmatrix}$$



Prikprodukt

Prikproduktet (skalarproduktet) mellem to vektorer $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ i rummet er defineret som

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

Ortogonale vektorer

To vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er ortogonale, hvis deres prikprodukt giver nul

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 = 0$$

Vinkel mellem vektorer

Vinklen, v, mellem to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ kan beregnes ved

$$v = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right)$$

Krydsproduktet af to vektorer

Krydsproduktet af to vektorer $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ er en ny vektor

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

To vektorers udspændte parallelogram

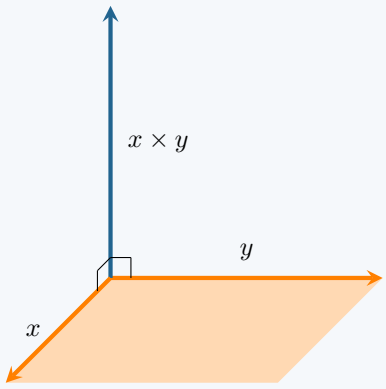
Krydsproduktet af to vektorer står vinkelret på parallelogrammet udspændt af de to vektorer.

Arealet af det udspændte parallelogram er lig

$$T = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

Vinklen mellem de to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ kan beregnes ved

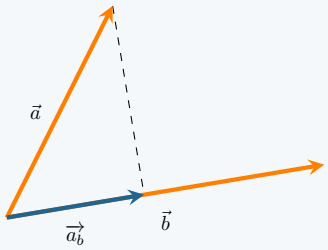
$$v = \sin^{-1}\left(\frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right)$$



Projektion af vektorer

Projektionen af vektoren $\vec{a}$ på vektoren $\vec{b}$, kan beregnes ved

$$\overrightarrow{a_b} = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \cdot \vec{b}$$



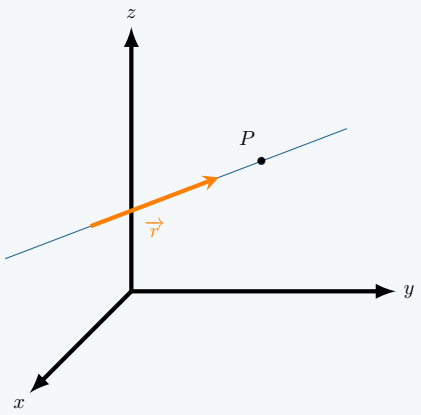
5.3 Linjer i rummet

Linjens parameterfremstilling

Linjen med retningsvektor $\vec{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$ og som går gennem punktet $P = (x_0, y_0, z_0)$, har parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$$

Her er t en reel parameter.



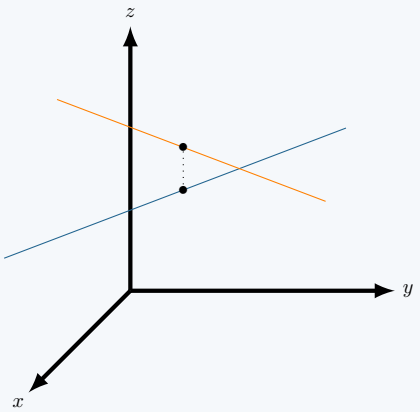
Parallele linjer

To linjer, med retningsvektorer hhv. $\vec{r}$ og $\vec{s}$, er parallele hvis

$$\vec{r} \times \vec{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vindskæve linjer

Hvis to linjer hverken er parallelle eller skærer hinanden, så kaldes de vindskæve.



5.4 Planer i rummet

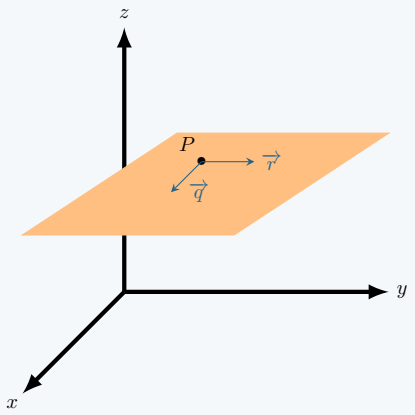
Planens parameterfremstilling

Linjen med retningsvektorer $\vec{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$ og $\vec{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$,

og som går gennem punktet $P = (x_0, y_0, z_0)$, har parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$$

Her er t og s en reelle parametre.

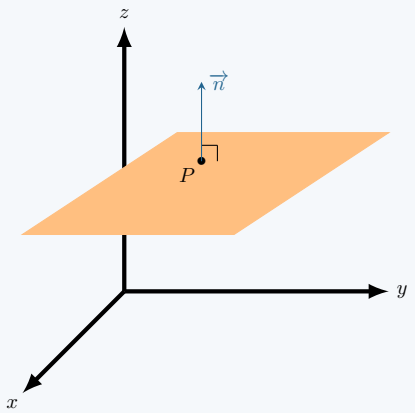


Plan ud fra normalvektor

En plan med normalvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ og som går gennem punktet $P = (x_0, y_0, z_0)$ har ligningen

$$n_1 \cdot (x - x_0) + n_2 \cdot (y - y_0) + n_3 \cdot (z - z_0) = 0$$

Dette kaldes også planens normalform.



Normalvektor ud fra retningsvektorer

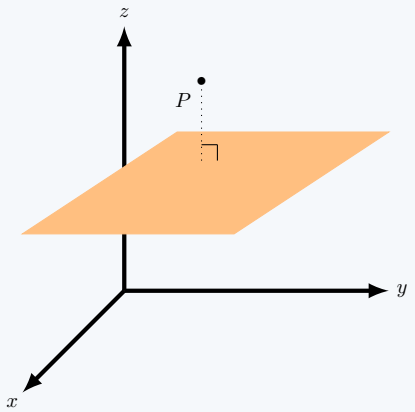
Normalvektoren for en plan med retningsvektorer $\vec{r}$ og $\vec{q}$, kan beregnes ved

$$\vec{n} = \vec{r} \times \vec{q}$$

Afstand fra punkt til plan

Afstanden fra et punkt $P = (x_0, y_0, z_0)$ til en plan m med ligningen $ax + by + cz + d = 0$, kan beregnes ved

$$dist(P, m) = \frac{|a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + c \cdot z_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$



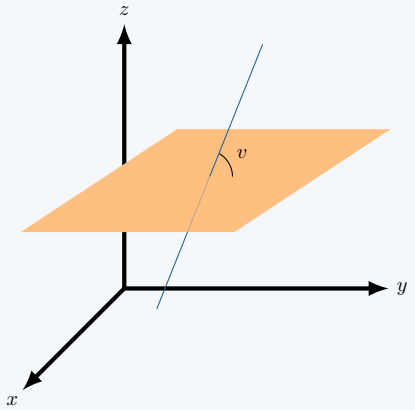
Vinkel mellem linje og plan

Vinklen mellem en linje med retningsvektor $\vec{r}$ og en plan med normalvektor $\vec{n}$, kan beregnes ved

$$v = 90 - \cos^{-1}\left(\frac{\vec{n} \bullet \vec{r}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{r}|}\right)$$

Hvis vinklen mellem retningsvektoren og normalvektoren er stump, beregnes vinklen mellem linjen og planen ved

$$v = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{n} \bullet \vec{r}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{r}|}\right) - 90$$



Skæringspunkt mellem linje og plan

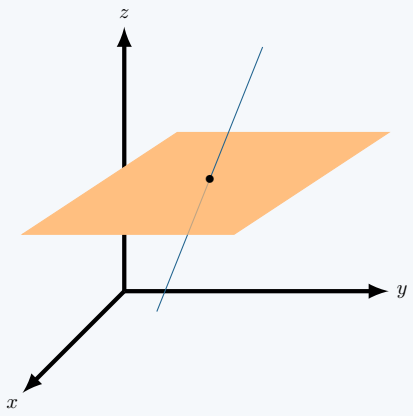
Skæringspunktet mellem en plan med ligningen $ax + by + cz + d = 0$ og en linje

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$$

findes ved at løse for t i ligningen

$$a \cdot (x_0 + t \cdot r_1) + b \cdot (y_0 + t \cdot r_2) + c \cdot (z_0 + t \cdot r_3) + d = 0$$

Den fundne værdi for t indsættes i paramterfremstillingen og koordinaterne til skæringspunktet beregnes.



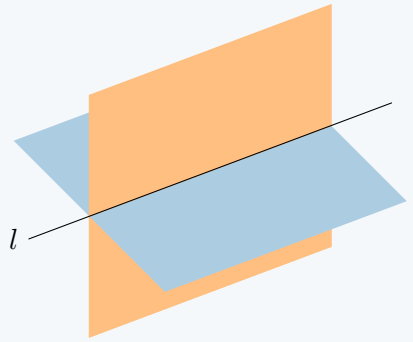
Skæringslinje mellem to planer

Skæringslinjen l mellem to planer

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$
$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

har parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{c_1 \cdot d_2 - c_2 \cdot d_1}{b_1 \cdot c_2 - b_2 \cdot c_1} \\ \frac{b_2 \cdot d_1 - b_1 \cdot d_2}{b_1 \cdot c_2 - b_2 \cdot c_1} \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{a_2 \cdot c_1 - a_1 \cdot c_2}{b_1 \cdot c_2 - b_2 \cdot c_1} \\ \frac{b_2 \cdot a_1 - b_1 \cdot a_2}{b_1 \cdot c_2 - b_2 \cdot c_1} \end{pmatrix}$$

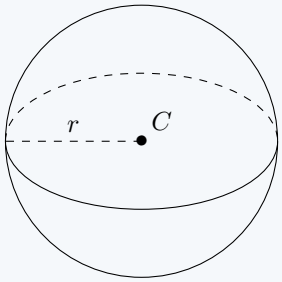


5.5 Kuglen

Kuglens ligning

En kugle med radius r og centrum i $C = (a, b, c)$ har ligningen

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$$



6 Funktioner

6.1 Lineære funktioner

Se *Den rette linje* under afsnit 3.1

6.2 Andengradspolynomier

Se *Parablen* under afsnit 3.4

6.3 Potensfunktioner

Grafens udseende

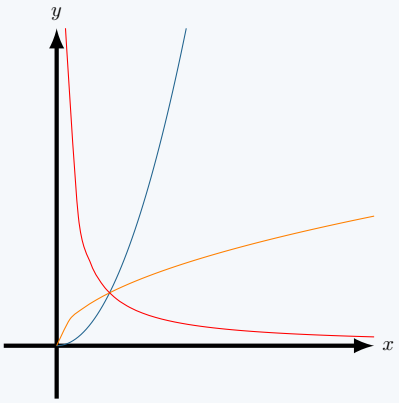
Potensfunktionen har forskriften

$$f(x) = b \cdot x^a$$

Betydning af a:

- Hvis $a > 0$ så er funktionen voksende.
- Hvis $a < 0$ så er funktionen aftagende.

Funktionen går altid igennem punktet $(1, b)$



Potensvækst

For en potensfunktion $f(x) = b \cdot x^a$ gælder der, at når x vokser med en fast procent r_x, så vokser y også med en fast procent r_y. Sammenhængen mellem r_x og r_y er

$$r_y = (1 + r_x)^a - 1, \qquad r_x = \sqrt[a]{r_y + 1} - 1$$

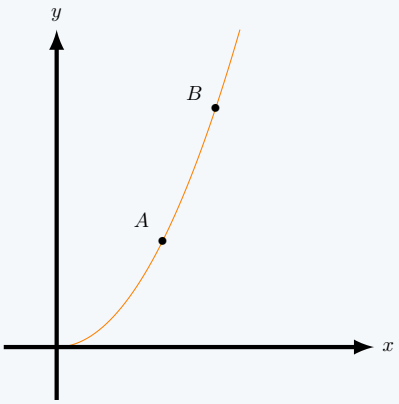
To-punkts-formel

Potensfunktionen $f(x) = b \cdot x^a$ gennem punkterne $A = (x_0, y_0)$ og $B = (x_1, y_1)$ kan beregnes ved

$$a = \frac{\log(y_1) - \log(y_0)}{\log(x_1) - \log(x_0)}$$

og

$$b = \frac{y_0}{(x_0)^a}$$



6.4 Eksponentielle funktioner

Grafens udseende

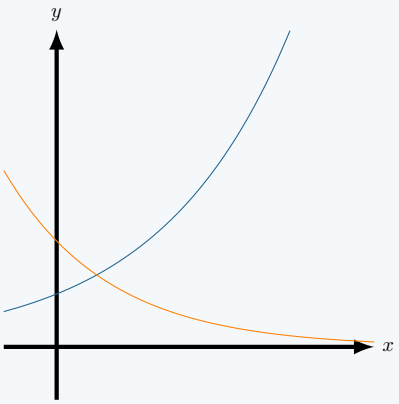
Den eksponentielle fuktion har forskriften

$$f(x) = b \cdot a^x$$

Betydning af a:

- Hvis $a > 1$ så er funktionen voksende.
- Hvis $0 < a < 1$ så er funktionen aftagende.

Funktionen går altid igennem punktet $(0, b)$



Vækstrate

For en eksponentiel funktion $f(x) = b \cdot a^x$ angiver vækstraten hvor meget funktionen vokser/aftager, når x vokser med 1. Vækstraten beregnes ved

$$r = a - 1$$

Fordoblingskonstant

For en eksponentiel funktion $f(x) = b \cdot a^x$ hvor $a > 1$, kan fordbolingskonstanten beregnes ved

$$T_2 = \frac{\log(2)}{\log(a)}$$

Fordbolingskonstanten angiver, hvor meget en x-værdi skal øges med, for at funktionsværdien er fordoblet.

Halveringskonstant

For en eksponentiel funktion $f(x) = b \cdot a^x$ hvor $0 < a < 1$, kan halveringskonstanten beregnes ved

$$T_{\frac{1}{2}} = \frac{\log(\frac{1}{2})}{\log(a)}$$

Halveringskonstanten angiver, hvor meget en x-værdi skal øges med, for at funktionsværdien er halveret.

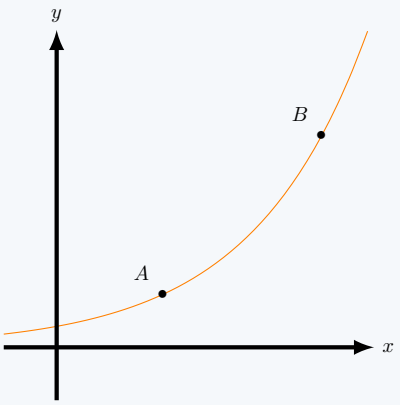
To-punkts-formel

Den eksponentielle funktion $f(x) = b \cdot a^x$ gennem punkterne $A = (x_0, y_0)$ og $B = (x_1, y_1)$ kan beregnes ved

$$a = \left(\frac{y_1}{y_0}\right)^{\frac{1}{x_1 - x_0}}$$

og

$$b = \frac{y_0}{a^{x_0}}$$



6.5 Logaritmefunktioner

Grafens udseende

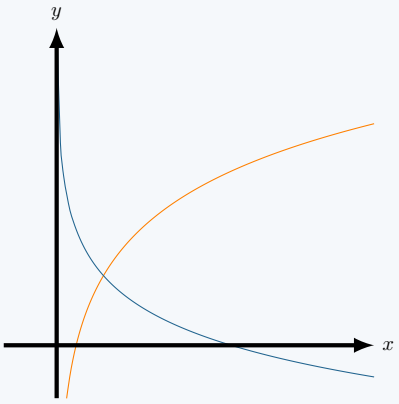
Logaritmefunktionen har forskriften

$$f(x) = a \cdot \log(b \cdot x)$$

Betydning af a:

- Hvis $a > 0$ så er funktionen voksende.
- Hvis $a < 0$ så er funktionen aftagende.

Funktionen går altid igennem punktet $(\frac{1}{b}, 0)$



Se også *regneregler for logaritmer* under afsnit 1.3

6.6 Trigonometriske funktioner

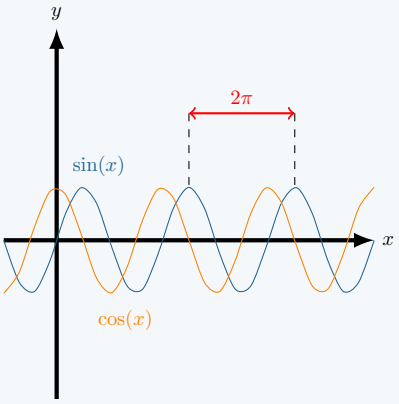
$\sin(x)$ og $\cos(x)$

De trigonometriske funtkioner $\sin(x)$ og $\cos(x)$ er periodiske med 2π dvs.

$$\sin(x) = \sin(x + 2\pi), \qquad \cos(x) = \cos(x + 2\pi)$$

$\sin(x)$ er en forskydning af $\cos(x)$ med $\frac{\pi}{2}$ hen af x-aksen.

$$\sin(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$



Grundrelationen

Den trigonometriske grundrelation siger at

$$\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$$

Additionsformlerne

Der gælder flg. additionsformler for $\sin(x)$ og $\cos(x)$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x)$$

$$\sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \sin(y)\cos(x)$$

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(y)\sin(x)$$

$$\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(y)\sin(x)$$

Dobbeltvinkelformlerne

Der gælder flg. formler om den dobbelte vinkel for $\sin(x)$ og $\cos(x)$

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

$$\cos(2x) = 2\cos(x)^2 - 1$$

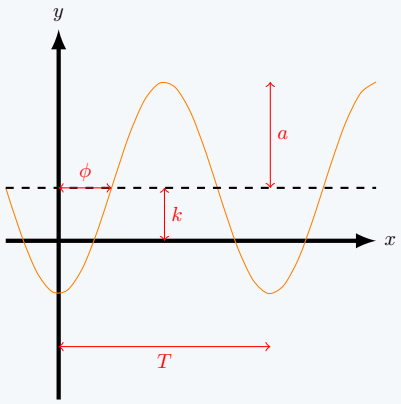
Svingninger

En funktion på formen

$$f(x) = a \cdot \sin(\omega \cdot x + \phi) + k$$

kaldes en harmonisk svingning. Her er a, ω, ϕ og k konstanter.

- a kaldes amplituden
- ω kaldes vinkelhastigheden
- ϕ kaldes faseforskydningen
- k kaldes akseforskydningen



Vi definerer sviningshastigheden (eller perioden) som

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Vi definerer frekvensen som

$$F = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

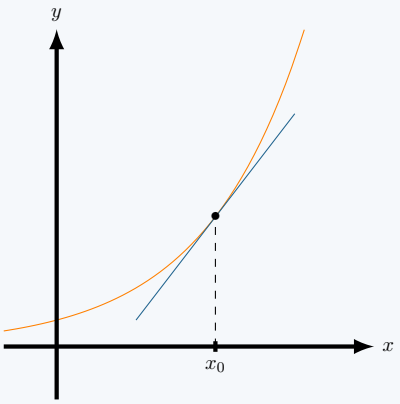
7 Differentialregning

Differentialkvotienten

Differentialkvotienten af en funktion $f(x)$ i et punkt x_0 er grænseværdien

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Den afledte funktion angiver hældningen i et punkt.



Tangentens ligning

For en differentiabel funktion $f(x)$ er tangentens ligning gennem punktet $(x_0, f(x_0))$ givet ved

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

Regneregler

Der gælder flg. regneregler for differentialregning

	$\boldsymbol{h(x)}$	$\boldsymbol{h'(x)}$
Konstantreglen	$k \cdot f(x)$	$k \cdot f'(x)$
Sumreglen	$f(x) + g(x)$	$f'(x) + g'(x)$
Differensreglen	$f(x) - g(x)$	$f'(x) - g'(x)$
Produktreglen	$f(x) \cdot g(x)$	$f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
Kvotientreglen	$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$
Kædereglen	$f\left(g(x)\right)$	$f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Elementære afledte funktioner

Tabel over elementære funktioner samt de tilhørende afledte funktioner.

$f(x)$	$f'(x)$
k	0
x	1
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	e^x
$e^{a \cdot x}$	$a \cdot e^{a \cdot x}$
a^x	$a^x \cdot \ln(a)$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\log_a(x)$	$\frac{1}{x \cdot \ln(a)}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$1 + \tan(x)^2$

8 Integralregning

8.1 Ubestemt integral

Stamfunktion

Hvis $f(x)$ er en kontinuert funktion med stamfunktion $F(x)$, så gælder der at

$$\int f(x)\ dx = F(x) + C$$

for en konstant C.

Integrationsprøven

$F(x)$ er en stamfunktion til $f(x)$, hvis den afledte funktion af $F(x)$, er $f(x)$. Med andre ord gælder der at

$$F'(x) = \left(\int f(x)\ dx \right)' = f(x)$$

Regneregler

Hvis $f(x)$ og $g(x)$ er kontinuerte funktioner, og k er en reel konstant, så gælder der flg. regneregler for integralregning

$$\int f(x) + g(x)\ dx = \int f(x)\ dx + \int g(x)\ dx$$

$$\int f(x) - g(x)\ dx = \int f(x)\ dx - \int g(x)\ dx$$

$$\int k \cdot f(x)\ dx = k \cdot \int f(x)\ dx$$

Partiel integration

Hvis $f(x)$ og $g(x)$ er kontinuerte funktioner, og $F(x)$ er en stamfunktion til $f(x)$, så er

$$\int f(x) \cdot g(x)\ dx = F(x) \cdot g(x) - \int F(x) \cdot g'(x)\ dx$$

Integration ved substitution

Hvis $f(x)$ er en kontinuert funktion med stamfunktion $F(x)$, og $g(x)$ er differentiabel, hvor den afledte er kontinuert, så er

$$\int f\left(g(x)\right) \cdot g'(x)\ dx = \int f(t)\ dt = F(g(x)) + C$$

hvor $t = g(x)$.

Elementære stamfunktioner

Tabel over elementære funktioner samt de tilhørende stamfunktioner.

$\boldsymbol{f(x)}$	$\boldsymbol{F(x)}$
0	k
k	$k \cdot x$
x^n	$\frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln(\lvert x \rvert)$
$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}}$
e^x	e^x
$e^{a \cdot x}$	$\frac{1}{a} \cdot e^{a \cdot x}$
a^x	$\frac{1}{\ln(a)} \cdot a^x$
$\ln(x)$	$x \cdot (\ln(x) - 1)$
$\log_a(x)$	$\frac{1}{\ln(a)} \cdot (x \cdot \ln(\lvert x \rvert) + x)$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\tan(x)$	$-\ln(\lvert \cos(x) \rvert)$

8.2 Bestemt integral

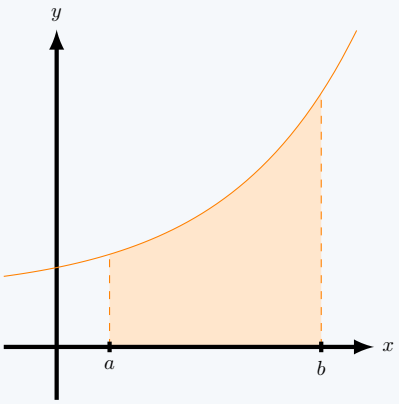
Areal mellem en funktion og x-aksen

Arealet mellem en positiv kontinuert funktion og x-aksen i intervallet $[a, b]$, kan beregnes ved

$$A = \int_a^b f(x)\ dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Hvis funktionen er negativ, så regnes arealet som

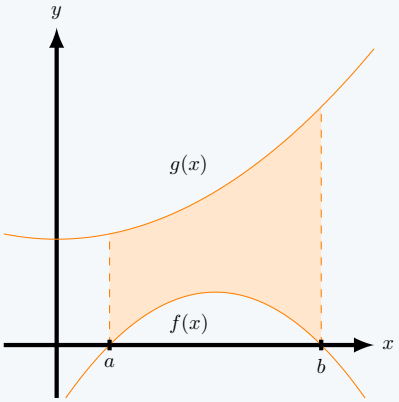
$$A = -\int_a^b f(x)\ dx$$



Areal mellem to funktioner

Arealet mellem to kontinuerte funktioner i intervallet $[a, b]$, hvor $f(x) \leq g(x)$ i hele intervallet, kan beregnes ved

$$A = \int_a^b g(x) - f(x)\ dx$$



Regneregler

For en funktion $f(x)$ i intervallet $[a, b]$ gælder der flg. regneregler

$$\int_a^a f(x)\ dx = 0$$

$$\int_a^b f(x)\ dx = -\int_b^a f(x)\ dx$$

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx$$

Den sidste regel kaldes indskudssætningen og gælder for ethvert tal c.

8.3 Andvendelse

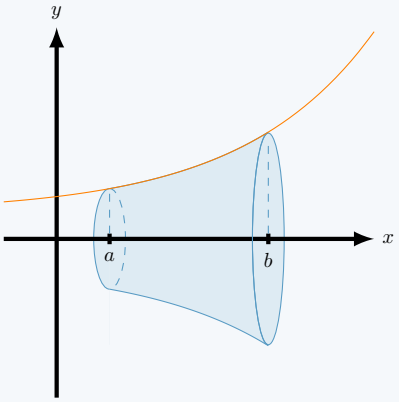
Omdrejningslegeme om x-aksen

Rumfanget af omdrejningslegemet, som fremkommer ved at rotere en positiv kontinuert funktion $f(x)$ i intervallet $[a, b]$, 360 grader om x-aksen, kan beregnes ved

$$V = \pi \cdot \int_a^b f(x)^2 \, dx$$

Overfladearealet af samme omdrejningslegeme, kan regnes som

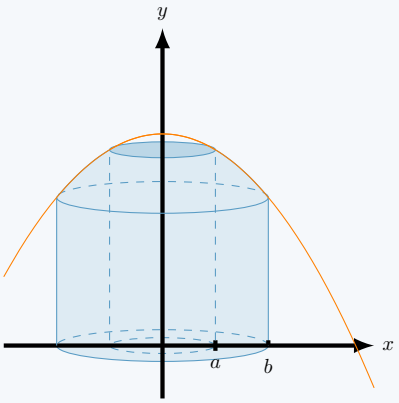
$$O = 2\pi \cdot \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + f'(x)^2} \, dx$$



Omdrejningslegeme om y-aksen

Rumfanget af omdrejningslegemet, som fremkommer ved at rotere en positiv kontinuert funktion $f(x)$ i intervallet $[a, b]$, 360 grader om y-aksen, kan beregnes ved

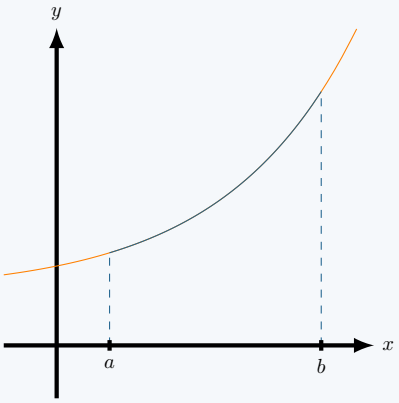
$$V = 2\pi \cdot \int_a^b x \cdot f(x) \, dx$$



Kurvelængde

Kurvelængden for en differentiabel funktion $f(x)$ i intervallet $[a, b]$ kan beregnes ved

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} \, dx$$

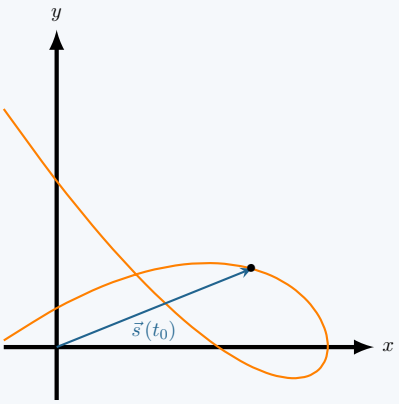


9 Vektorfunktioner

Stedfunktion

Vektorfunktionen med koordinatfunktionerne $x(t)$ og $y(t)$ er givet ved

$$\vec{s}\,(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

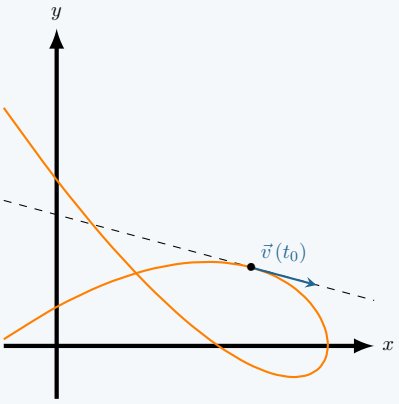


Hastighedsfunktion

For en vektorfunktion $\vec{s}\,(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ er hastighedsfunktionen defineret som

$$\vec{v}\,(t) = \vec{s}\,'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

$\vec{v}\,(t_0)$ er retningsvektor for tangenten i punktet på kurven svarende til parameterværdien t_0.



Fart

Farten til et tidspnukt t_0 er lig længden af hastighedsvektoren til t_0

$$|\vec{s}\,'(t_0)| = |\vec{v}(t_0)|$$

Accelerationsfunktion

For en vektorfunktion $\vec{s}\,(t)$ er accelerationsfunktionen defineret som

$$\vec{a}\,(t) = \vec{v}\,'(t) = \vec{s}\,''(t)$$

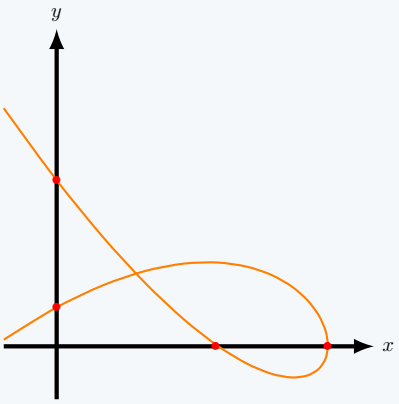
Skæring med akserne

For en vektorfunktion $\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ kan parameteren for punktet svarende til skæringen med x-aksen findes ved at løse ligningen

$$y(t) = 0$$

Parameteren for punktet svarende til skæringen med y-aksen kan findes ved at løse ligningen

$$x(t) = 0$$



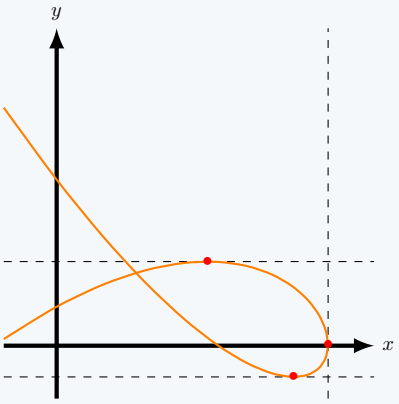
Lodrette og vandrette tangenter

For en vektorfunktion $\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ kan parameteren for punktet svarende til de lodrette vendetangenter findes ved at løse ligningen

$$x'(t) = 0$$

Parameteren for punktet svarende til de vandrette vendetangenter kan findes ved at løse ligningen

$$y'(t) = 0$$

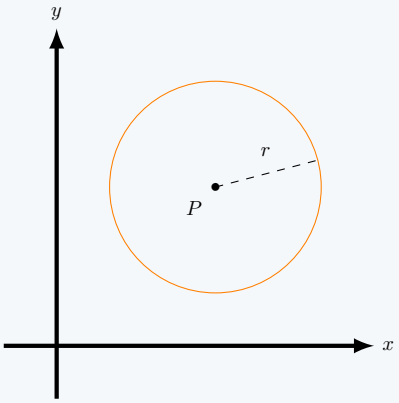


Cirklens paramterfremstilling

En cirkel med centrum $P = (x_0, y_0)$ og radius r har parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos(t) + x_0 \\ r \cdot \sin(t) + y_0 \end{pmatrix}$$

Her er t en reel parameter.



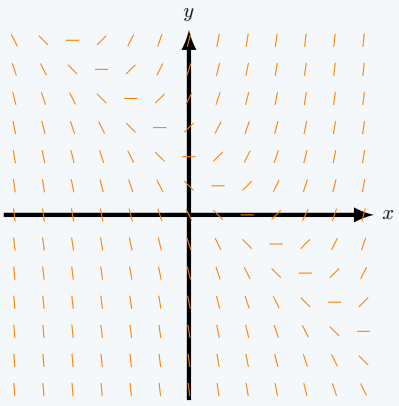
Se *Linjer* under afsnit 4.3 for linjens parameterfremstilling

10 Differentialligninger

Retningfelt og linjeelement

Et linjeelement $(x_0, f(x_0); f'(x_0))$ angiver hældningen $f'(x_0)$ for en løsning til en differentialligning i et punkt $(x_0, f(x_0))$.

En samling af linjeelementer udgør et retningsfelt og giver et indtryk af hvordan løsningerne til en differentialligning ser ud.



Differentialligninger for vækst

Tabel over differentialligninger og deres fuldstændige løsning

	Differentialligning	**Fuldstændig løsning**
Proportionel	$y' = k \cdot y$	$y = c \cdot e^{k \cdot x}$
Forskudt proportionel	$y' = b - a \cdot y$	$y = \frac{b}{a} + c \cdot e^{-a \cdot x}$
Logistisk	$y' = k \cdot y \cdot (M - y)$	$y = \frac{M}{1 + c \cdot e^{-k \cdot M \cdot x}}$

Separation af variable

For kontinuerte funktioner $g(x)$ og $h(y) \neq 0$ kan løsningen til differentialligningen

$$y' = g(x) \cdot h(y)$$

findes ved at løse ligningen

$$\int \frac{1}{h(y)} \, dy = \int g(x) \, dx$$

11 Rekursioner

Homogen lineær rekursionsligning

Løsnigen af den homogene lineære rekursionsligning af 1. orden

$$x_n = a \cdot x_{n-1}$$

er givet ved følgen

$$x_n = k \cdot a^n$$

for $a \in \mathbb{R}$ og $n \geq 1$.

Eulers metode

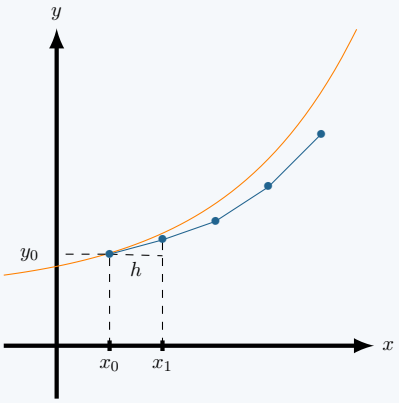
Eulers metode giver en numerisk estimation af en løsning til en differentialligning af formen

$$y' = g(x, y)$$

Ved skridtlængde h og startpunkt (x_0, y_0), kan de efterfølgende punkter findes rekursivt ved

$$x_n = x_0 + n \cdot h, \qquad y_n = y_{n-1} + g(x_{n-1}, y_{n-1}) \cdot h$$

for $n \geq 1$.

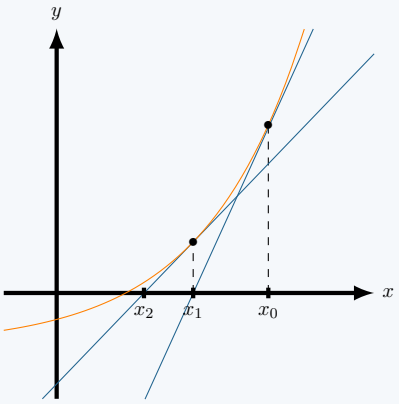


Newtons metode

Newtons metode kan bruges til at finde nulpunkter for differentiabel funktion $f(x)$.

Hvis x_n approksimerer løsningen til ligningen $f(x) = 0$ og $f'(x_n) \neq 0$, så kan den næste approksimation bestemmes ved

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$



Ordliste

accelerationsfunktion, 45
additionsformler, 38
afledte funktioner, 40
afstand fra punkt til plan, 32
afstandsformel, 12
amplitude, 38
andengradsligning, 15
andengradsligninger, 5
andengradspolynomium, 34
areal af vilkårlig trekant, 7
areal mellem funktioner, 43

bestemt integral, 43
brøker, 2

cirkelafsnit, 9
cirkelbue, 10
cirkeludsnit, 9
cirklens ligning, 14
cirklens parameterfremstilling, 46
cosinus, 6
cosinusrelationen, 7
cylinder, 23

delvis integration, 41
den naturlige logaritme, 4
den rette linje, 11
differentialkvotient, 39
differentialligninger for vækst, 47
diskriminant, 5, 15
diskriminantformel, 5
distanceformel, 13
dobbeltvinkelformer, 38

eksponenter, 3
eksponentielle funktioner, 35
Eulers metode, 48

fart, 45
faseforskydning, 38
fordoblingskonstant, 36
forskudt proportionel vækst, 47
frekvens, 38
førstegradsligninger, 5

grundrelationen, 37

halveringskonstant, 36
hastighedsfunktion, 45
Herons formel, 7

indskrevne cirkel, 7
indskudsreglen, 20
integration ved substitution, 42
integrationsprøven, 41

kegle, 25
keglestub, 25
korde, 8
krydsprodukt, 28
kugle, 23, 33
kugleafsnit, 24
kugleudsnit, 24
kurvelængde, 44
kvadratrod, 3
kvadratsætninger, 2

ligevægt, 18
lineære funktioner, 34
linjeelement, 47
linjens paramterfremstilling
    i planen, 21
    i rummet, 29
lodrette og vandrette tangenter, 46
logaritme, 4
logartimefunktion, 37
logistisk vækst, 47

midtpunkt, 13

Newtons metode, 48
normalvektor, 31
    linje, 22
nulpunkter, 15

omdrejningslegeme, 44
omskrevne cirkel, 8
ortogonale linjer, 12

parabel, 15
parallele linjer, 29
partiel integration, 41
periode, 38
pilhøjde, 9
plan og plan, 33
planens parameterfremstilling, 31

polær form, 17
potenser, 3
potensfuntkion, 34
potensvækst, 34
prisme, 23
projektion af punkt på linje, 13
proportionel vækst, 47
pyramide, 26
pyramide stub, 26
Pythagoras, 6

rektangulær form, 17
rekursionsligning, 48
retningsfelt, 47
retvinklet trekant, 6
rødder, 3

seperation af variable, 47
sinus, 6
sinusrelationen, 6
skæring
    cirkel og cirkel, 14
    cirkel og linje, 14
    linje og linje, 12
    linje og plan, 33
    vektorfunktion og x-akse eller y-akse, 46
stamfunktioner, 42
stedvektor, 45
svingningshastighed, 38

tangens, 6
tangentens ligning, 39
to ligninger med to ubekendte, 5
to-punkts-formel
    eksponentiel funktion, 36
    potensfunktion, 35
    ret linje, 11
toppunkt, 16
trigonometrisk funktion, 37, 38
tværvektor, 19

ubestemt integral, 41
udfoldning af kegle, 25
udfoldning af keglestub, 25

vektorer i planen
    areal, 20
    enhedsvektor, 19
    længde, 18
    mellem to punkter, 19
    ortogonalitet, 20
    prikprodukt, 20
    projektion, 21
    skalarprodukt, 20
    vinkel, 21
vektorer i rummet
    areal, 28
    enhedsvektor, 27
    længde, 26
    mellem to punkter, 27
    ortogonalitet, 28
    prikprodukt, 28
    projektion, 29
    skalarprodukt, 28
    vinkel, 28
vektorfunktion, 45
vindskæve linjer, 30
vinkel med x-aksen, 11
vinkel mellem punkt og plan, 32
vinkel mellem to linjer, 12
vinkelhastighed, 38
vækstrate, 35